Solusi Persamaan Nirlanjar

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Rumusan Masalah

- **Persoalan**: Temukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$f(x) = 0,$$

yaitu nilai $x = s$ sedemikian sehingga $f(s) = 0$.

- Nilai x = s disebut **akar** persamaan f(x) = 0.

- **Contoh persoalan dalam bidang elektronika**:

Suatu arus osilasi dalam rangkaian listrik diberikan oleh

$$I = 10e^{-t} \sin(2\pi t)$$

yang dalam hal ini *t* dalam detik. Tentukan semua nilai *t* sedemikan sehingga $I = 2$ ampere.

Persoalan ini adalah mencari nilai *t* sedemikian sehingga:

$$10e^{-t} \sin(2\pi t) - 2 = 0$$

Metode Pencarian Akar

1. **Metode tertutup** (*bracketing method*)
   - mencari akar di dalam selang [*a*, *b*];
   - Selang [*a*, *b*] sudah dipastikan berisi minimal satu buah akar,
   - karena itu metode jenis ini selalu berhasil menemukan akar.;
   - Dengan kata lain, lelarannya selalu konvergen (menuju) ke akar,
   - karena itu metode tertutup kadang-kadang dinamakan juga **metode konvergen.**

2. **Metode terbuka**

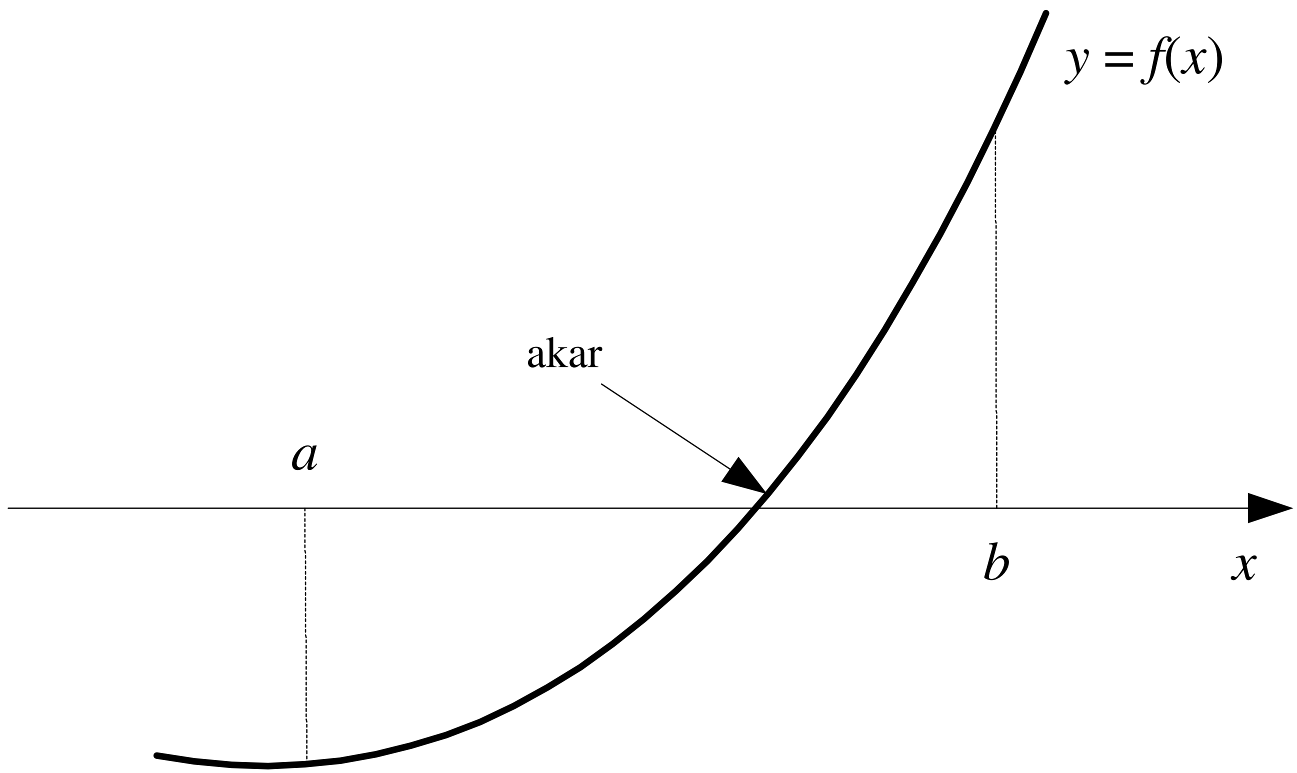
- tidak memerlukan selang [*a*, *b*] yang mengandung akar
- mencari akar melalui suatu lelaran yang dimulai dari sebuah tebakan (*guest*) awal,
- pada setiap lelaran kita menghitung hampiran akar yang baru.
- Mungkin saja hampiran akar yang baru mendekati akar sejati (konvergen), atau mungkin juga menjauhinya (divergen).
- Karena itu, metode terbuka tidak selalu berhasil menemukan akar, kadang-kadang konvergen, kadangkala ia divergen

Metode Tertutup

- Diperlukan selang [a, b] yang mengandung minimal satu buah akar.

- **Syarat cukup** keberadaan akar: Jika $f(a)\,f(b) < 0$ dan f(x) menerus di dalam selang [a, b], maka paling sedikit terdapat satu buah akar persamaan $f(x) = 0$ di dalam selang [a, b].

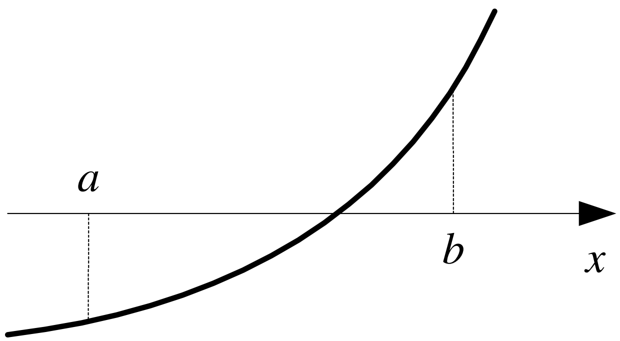
- Dengan kata lain: selang [a, b] harus berbeda tanda pada nilai-nilai fungsinya supaya terdapat minimal 1 buah akar.

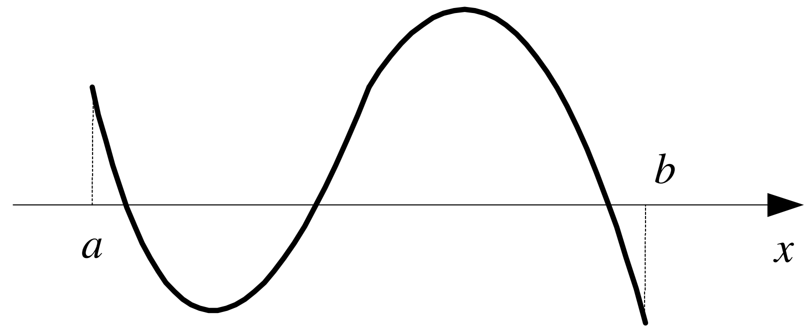


Syarat cukup keberadaan akar

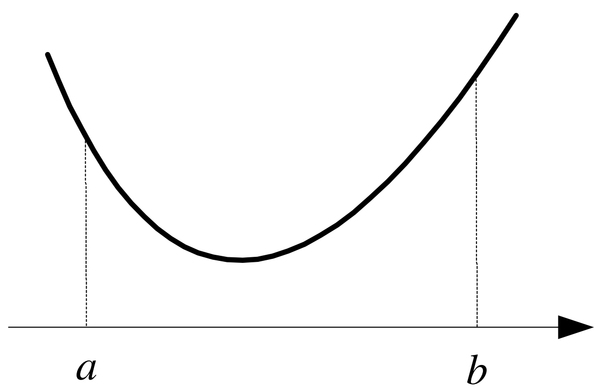
Kondisi yang mungkin terjadi:

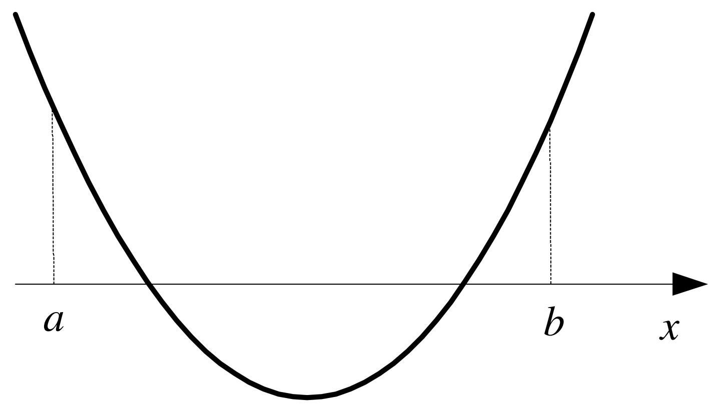
1. ***f*(*a*)*f*(*b*) < 0,** maka terdapat akar sebanyak bilangan ganjil





2. ***f*(*a*)*f*(*b*) > 0,** maka terdapat akar sebanyak bilangan genap (termasuk tidak ada akar)





- Cara menentukan selang yang cukup kecil dan mengandung akar:
  1. Membuat grafik fungsi di bidang *X*-*Y*, lalu melihat di mana perpotongannya dengan sumbu-*X*.

  2. Membuat tabel yang memuat nilai-nilai fungsi pada pada titik-titik absis yang berjarak tetap (*h*).

     Nilai *h* dibuat cukup kecil.

     (lihat contoh berikut)

- **Contoh**: Tabel nilai-nilai $f(x) = e^x - 5x^2$ mulai dari a = -0.5 sampai b = 1.4 dengan kenaikan absis sebesar h = 0.1

x	$f(x)$
-0.50	-0.643469
-0.40	-0.129680
-0.30	0.290818
-0.20	0.618731
-0.10	0.854837
0.00	1.000000
0.10	1.055171
0.20	1.021403
0.30	0.899859
0.40	0.691825
0.50	0.398721
0.60	0.022119
0.70	-0.436247
0.80	-0.974459
0.90	-1.590397
1.00	-2.281718
1.10	-3.045834
1.20	-3.879883
1.30	-4.780703
1.40	-5.744800

Selang-selang yang dapat dipilih dan mengandung akar:

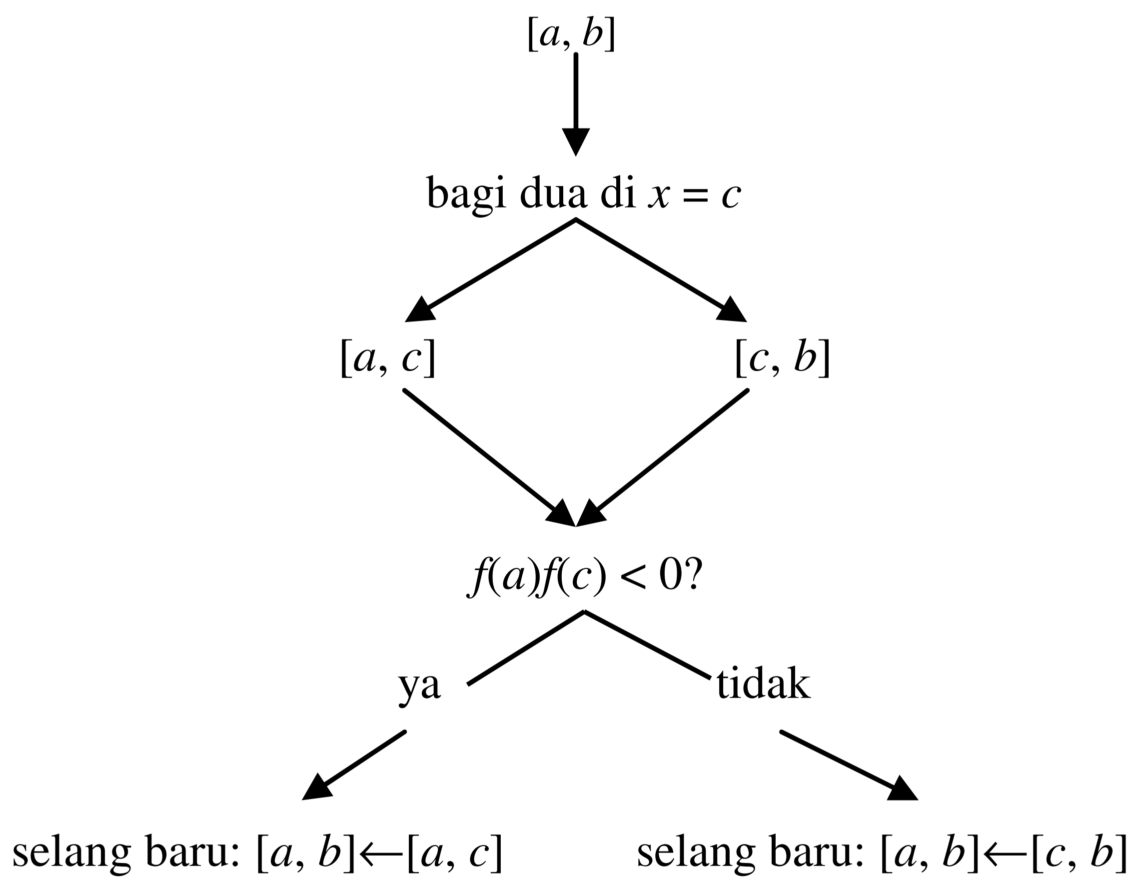
[-0.40, -0.30]
[0.60, 0.70]

[0.50, 0.70] → Bisa dipilih, tetapi cukup lebar
[-0.50, -0.20] → Bisa dipilih, tetapi cukup lebar

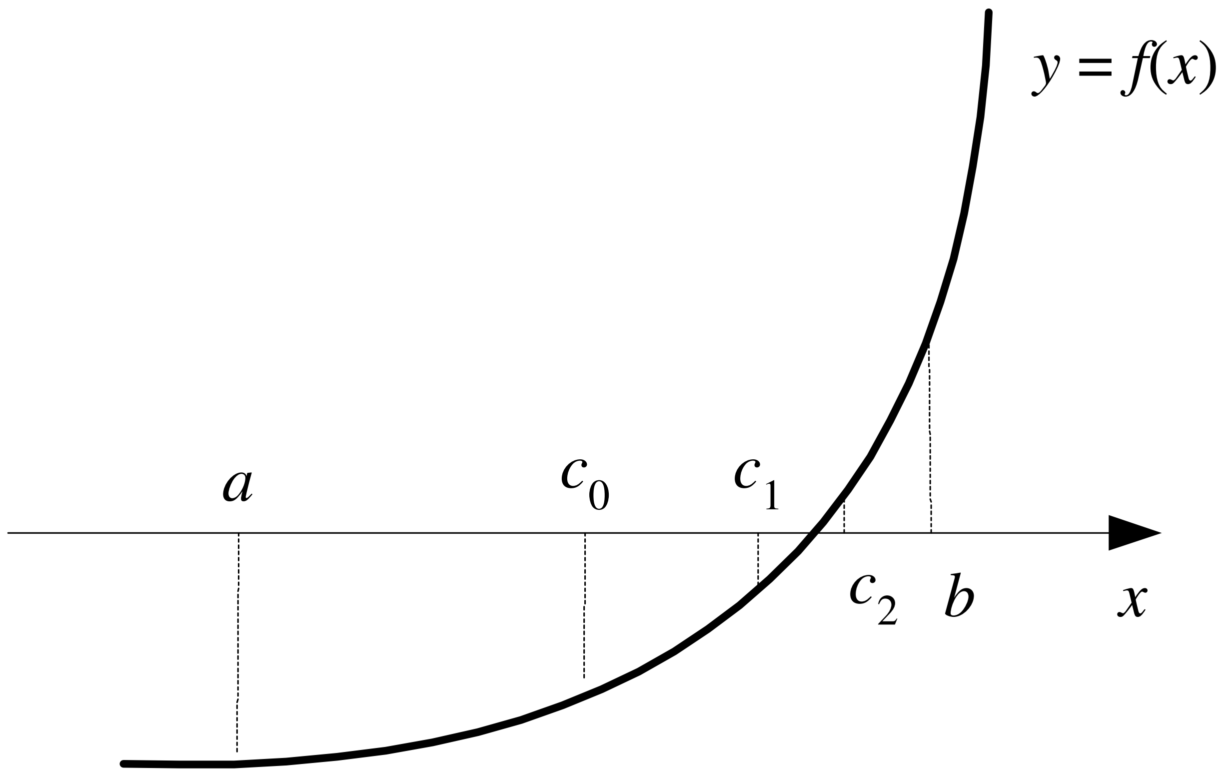
Metode Tertutup ada dua:

1. Metode bagidua
2. Metode regula-falsi

Metode Bagidua (*bisection method*)



- Proses pembagian selang [*a*, *b*] dengan metode bagidua



Kondisi berhenti lelaran dapat dipilih salah satu dari tiga kriteria berikut:

1. Lebar selang baru: $|a - b| < \varepsilon$, yang dalam hal ini ε adalah nilai toleransi lebar selang yang mengurung akar.

2. Nilai fungsi di hampiran akar: $f(c) < \mu$, yang dalam hal ini μ adalah nilai yang sangat kecil mendekati 0.

3. Galat relatif hampiran akar: $|(c_{baru} - c_{lama})/c_{baru}| < \delta$, yang dalam hal ini δ adalah galat relatif hampiran yang diinginkan.

```
procedure BagiDua(a,b: real);
{ Mencari akar f(x)=0 di dalam selang [a,b] dengan metode
   bagidua
  K.Awal : a dan b adalah ujung-ujung selang sehingga
   f(a)*f(b) < 0, nilai a dan b sudah terdefinisi.
  K.Akhir : Hampiran akar tercetak di layar.
}
const
    epsilon1 = 0.000001; {batas lebar selang akhir lelaran}
    epsilon2 = 0.00000001;     {bilangan yang sangat kecil,
   mendekati nol}
begin
  repeat
     c:=(a+b)/2;     { titik tengah [a,b]}
     if f(a)*f(c) < 0 then
       b:=c           {selang baru [a,b]=[a,c]}
     else
        a:=c;         {selang baru [a,b]=[c,b]}
   until (ABS(a-b)< epsilon1) or (f(c)) < epsilon2);
   { c adalah akar persamaan }
   writeln('Hampiran kar = ', x:10:6);
End;
```

- **Contoh 1**: Temukan akar $f(x) = e^x - 5x^2$ di dalam selang [0, 1] dan $\varepsilon = 0.00001$.

  Penyelesaian:

r	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Selang baru	Lebarnya
0	0.000000	0.500000	1.000000	1.000000	0.398721	-2.281718	[c, b]	0.500000
1	0.500000	0.750000	1.000000	0.398721	-0.695500	-2.281718	[a, c]	0.250000
2	0.500000	0.625000	0.750000	0.398721	-0.084879	-0.695500	[a, c]	0.125000
3	0.500000	0.562500	0.625000	0.398721	0.173023	-0.084879	[c, b]	0.062500
4	0.562500	0.593750	0.625000	0.173023	0.048071	-0.084879	[c, b]	0.031250
5	0.593750	0.609375	0.625000	0.048071	-0.017408	-0.084879	[a, c]	0.015625
6	0.593750	0.601563	0.609375	0.048071	0.015581	-0.017408	[c, b]	0.007813
7	0.601563	0.605469	0.609375	0.015581	-0.000851	-0.017408	[a, c]	0.003906
8	0.601563	0.603516	0.605469	0.015581	0.007380	-0.000851	[c, b]	0.001953
9	0.603516	0.604492	0.605469	0.007380	0.003268	-0.000851	[c, b]	0.000977
10	0.604492	0.604980	0.605469	0.003268	0.001210	-0.000851	[c, b]	0.000488
11	0.604980	0.605225	0.605469	0.001210	0.000179	-0.000851	[c, b]	0.000244
12	0.605225	0.605347	0.605469	0.000179	-0.000336	-0.000851	[a, c]	0.000122
13	0.605225	0.605286	0.605347	0.000179	-0.000078	-0.000336	[a, c]	0.000061
14	0.605225	0.605255	0.605286	0.000179	0.000051	-0.000078	[c, b]	0.000031
15	0.605255	0.605270	0.605286	0.000051	-0.000014	-0.000078	[a, c]	0.000015
1 6	0.605255	0.605263	0.605270	0.000051	0.000018	-0.000014	[c, b]	0.000008

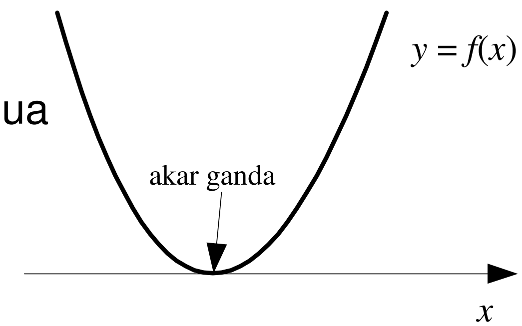
Jadi, hampiran akarnya adalah $x = 0.605263$

Kasus yang Mungkin Terjadi pada Penggunaan Metode Bagidua

1. Jumlah akar lebih dari satu
   - Bila dalam selang [*a*, *b*] terdapat lebih dari satu akar (banyaknya akar ganjil), hanya satu buah akar yang dapat ditemukan.
   - Cara mengatasinya: gunakan selang [*a*,*b*] yang cukup kecil yang memuat hanya satu buah akar.

2. Akar ganda.
   - Metode bagidua tidak berhasil menemukan akar ganda. Hal ini disebabkan karena tidak terdapat perbedaan tanda di ujung-ujung selang yang baru

Contoh: $f(x) = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$, mempunyai dua akar yang sama, yaitu $x = 3$.

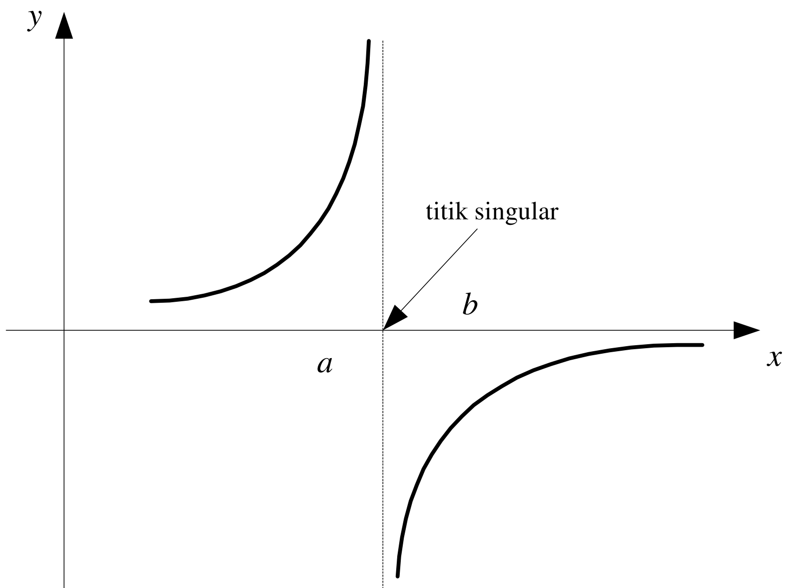


3. Singularitas.

Pada titik singular, nilai fungsinya tidak terdefinisi. Bila selang [*a*, *b*] mengandung titik singular, lelaran metode bagidua tidak pernah berhenti. Penyebabnya, metode bagidua menganggap titik singular sebagai akar karena lelaran cenderung konvergen. Yang sebenarnya, titik singular bukanlah akar, melainkan *akar semu*

Cara mengatasinya: periksa nilai $|f(b) - f(a)|$. Jika $|f(b) - f(a)|$ konvergen ke nol, akar yang dicari pasti akar sejati,

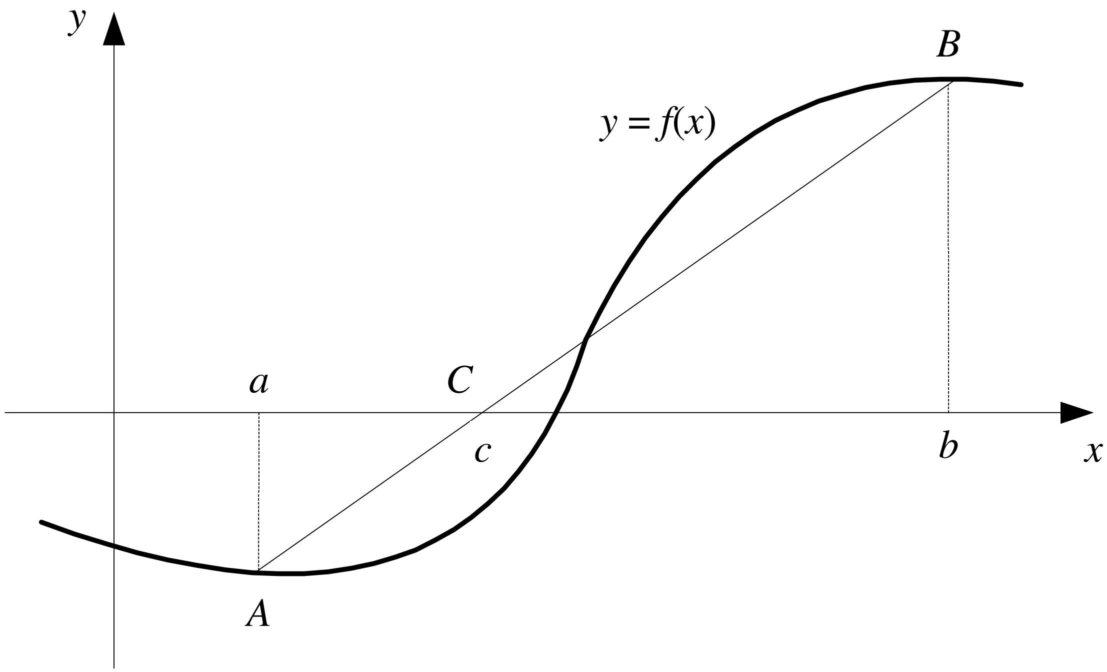
tetapi jika $|f(b) - f(a)|$ divergen, akar yang dicari merupakan titik singular (akar semu).



Metode Regula-Falsi

- Kelemahan metode bagidua: kecepatan konvergensinya sangat lambat.
- Kecepatan konvergensi dapat ditingkatkan bila nilai $f(a)$ dan $f(b)$ juga turut diperhitungkan.
- Logikanya, bila $f(a)$ lebih dekat ke nol daripada $f(b)$ tentu akar lebih dekat ke $x = a$ daripada ke $x = b$.
- Metode yang memanfaatkan nilai $f(a)$ dan $f(b)$ ini adalah **metode regula-falsi** (bahasa Latin) atau **metode posisi palsu**. (*false position method*)

Gambar Metode Regula-falsi

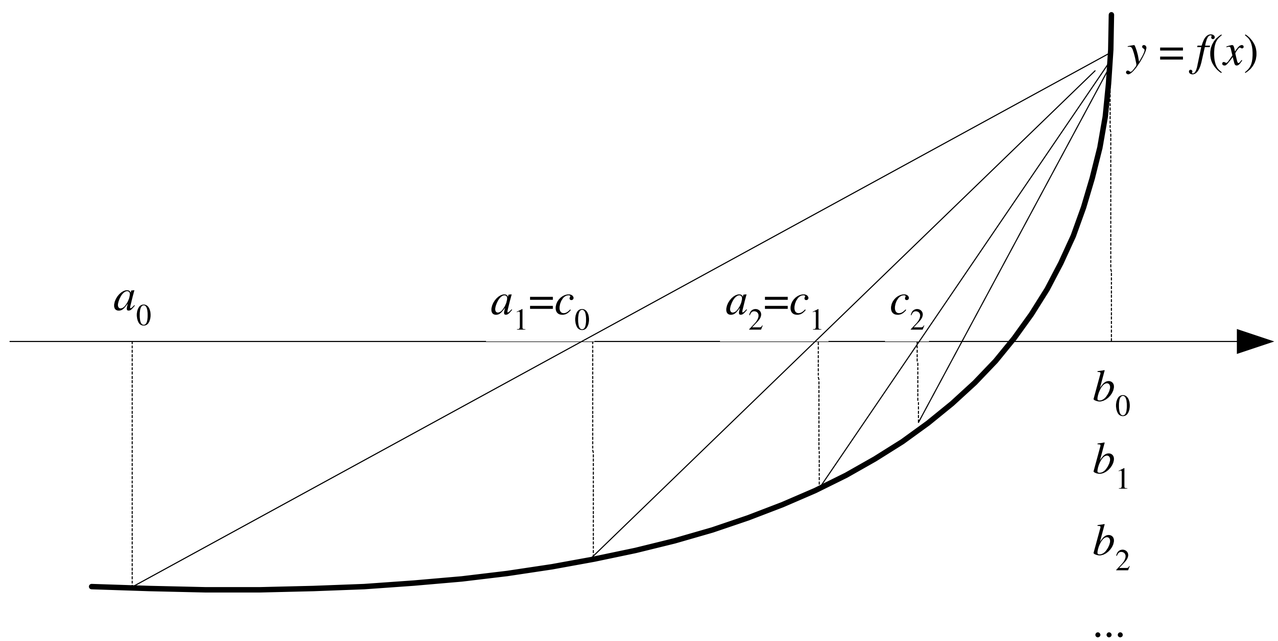


gradien garis AB = gradien garis BC

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-0}{b-c} \Rightarrow c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

```
procedure regula_falsi(a, b: real);
{ Mencari akar f(x)=0 di dalam selang [a,b] dengan metode regulafalsi
  K.Awal : a dan b adalah ujung-ujung selang sehingga f(a)*f(b) < 0,
           harga a dan b sudah terdefenisi
  K.Akhir : Hampiran akar tercetak di layar }
const
   epsilon1 = 0.00001;         {batas lebar selang akhir lelaran}
   epsilon2 = 0.000001;       {bilangan yang sangat kecil, bisa diganti }
begin
   repeat
     c:=b-(f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a)));
     if abs(f(c))< epsilon2 then     {f(c) = 0, c adalah akar}
      begin
        a:=c;
        b:=c;
      end
     else
      if f(a)*f(c) < 0 then
         b:=c;    {selang baru [a,b]=[a,c]}
      else
         a:=c;    {selang baru [a,b]=[c,b]}
   until ABS(a-b)< epsilon1;
   writeln('Hampiran akar : ', c:10:6);
end;
```

- Secara umum, lelaran metode regula-falsi lebih cepat daripada lelaran metode bagidua
- Tetapi, ada kemungkinan lelaran metdoe regulasi lebih lambat
- Kasus seperti ini akan terjadi bila kurva fungsinya cekung (konkaf) di dalam selang [*a, b*].
- Akibatnya, garis potongnya selalu terletak di atas kurva atau atau selalu terletak di bawah kurva.



- Pada kondisi yang paling ekstrim, $|b - a_r|$ tidak pernah lebih kecil dari ε,

- sebab salah satu titik ujung selang, dalam hal ini b, selalu tetap untuk setiap lelaran r = 0, 1, 2, ...

- Titik ujung selang yang tidak pernah berubah itu dinamakan **titik mandek** (*stagnant point*).

- Pada titik mandek,

$$|b_r - a_r| = |b - a_r| \quad r = 0, 1, 2, ...$$

- Contoh: menghitung akar $f(x) = e^x - 5x^2$ di dalam selang [0, 1] dan $\varepsilon = 0.00001$.

r	*a*	*c*	*b*	*f*(*a*)	*f*(*c*)	*f*(*b*)	Selang baru	Lebarnya
0	0.000000	0.304718	1.000000	1.000000	0.891976	-2.281718	[c,b]	0.695282
1	0.304718	0.500129	1.000000	0.891976	0.398287	-2.281718	[c,b]	0.499871
2	0.500129	0.574417	1.000000	0.398287	0.126319	-2.281718	[c,b]	0.425583
3	0.574417	0.596742	1.000000	0.126319	0.035686	-2.281718	[c,b]	0.403258
4	0.596742	0.602952	1.000000	0.035686	0.009750	-2.281718	[c,b]	0.397048
5	0.602952	0.604641	1.000000	0.009750	0.002639	-2.281718	[c,b]	0.395359
6	0.604641	0.605098	1.000000	0.002639	0.000713	-2.281718	[c,b]	0.394902
7	0.605098	0.605222	1.000000	0.000713	0.000192	-2.281718	[c,b]	0.394778
8	0.605222	0.605255	1.000000	0.000192	0.000052	-2.281718	[c,b]	0.394745
9	0.605255	0.605264	1.000000	0.000052	0.000014	-2.281718	[c,b]	0.394736
10	0.605264	0.605266	1.000000	0.000014	0.000004	-2.281718	[c,b]	0.394734
11	0.605266	0.605267	1.000000	0.000004	0.000001	-2.281718	[c,b]	0.394733
12	0.605267	0.605267	1.000000	0.000001	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
13	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
14	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
15	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
16	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
17	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
18	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
19	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
20	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	0.000000	-2.281718	[c,b]	0.394733
21	0.605267	0.605267	1.000000	0.000000	-0.000000	-2.281718	[a,c]	0.000000

Hampiran akar x = 0.605267

Perhatikan ujung selang tidak pernah berubah, sellau [c, b]. Nilai c selalu tetap (c adalah titik mandek/stagnan)

- Untuk mengatasi hal ini, kondisi berhenti pada algoritma regula-falsi harus kita tambah dengan memeriksa apakah nilai $f(c)$ sudah sangat kecil sehingga mendekati nol.

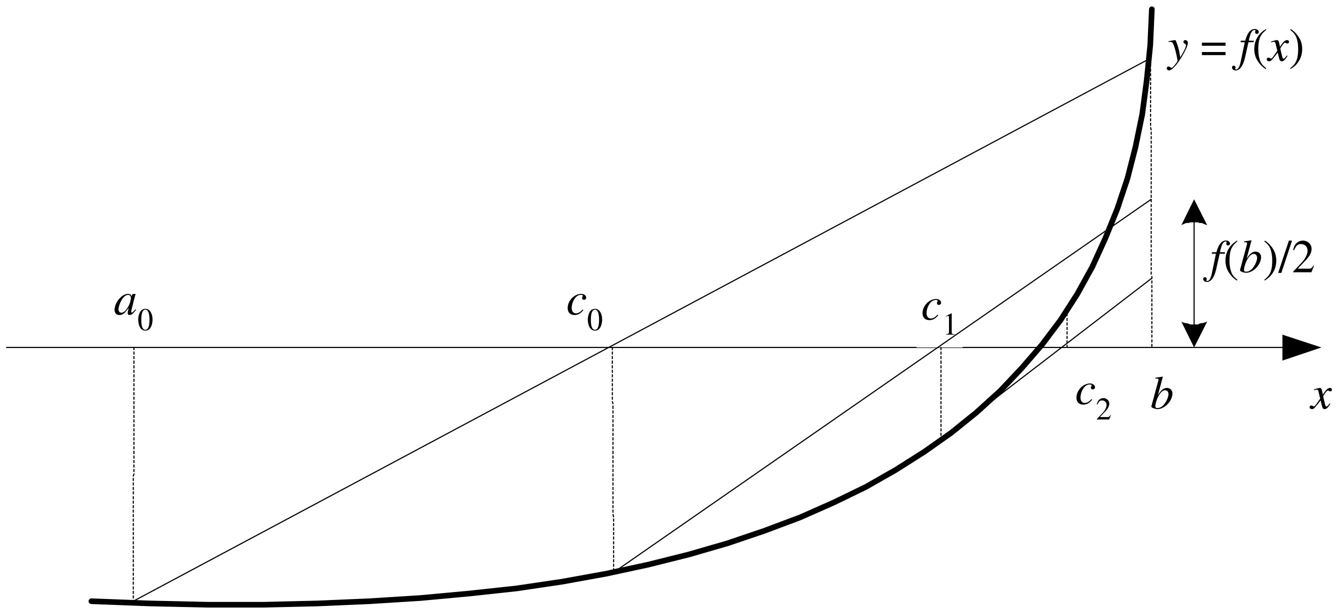
- Jadi, kondisi pada repeat-until menjadi

```
until (ABS(a-b) < epsilon1) or (ABS(f(c)) < epsilon2)
```

- Bila perubahan ini diterapkan pada soal pencarian akar di atas dengan epsilon2 = 0.000001, lelarannya akan berhenti pada r = 12 dengan akar x = 0.605267.

Perbaikan Metode Regula-Falsi

- Tentukan titik ujung selang yang tidak berubah (jumlah perulangan > 1) - yang kemudian menjadi titik mandek.
- Nilai *f* pada titik mandek itu diganti menjadi setengah kalinya



- Tabel lelaran untuk menghitung akar $f(x) = e^x - 5x^2$ di dalam selang [0, 1], ε = 0.00001 dan δ = 0.000001 dengan metode perbaikan regula-falsi adalah sebagai berikut:

r	*a*	*c*	*b*	*f*(*a*)	*f*(*c*)	*f*(*b*)	Selang baru	Lebarnya
0	0.000000	0.304718	1.000000	1.000000	0.891976	-2.281718	[c,b]	0.695282
						↓ (*/2)		
1	0.304718	0.609797	1.000000	0.891976	-0.019205	-1.140859	[a,c]	0.305079
2	0.304718	0.603367	0.609797	0.891976	0.008005	-0.019205	[c,b]	0.006430
3	0.603367	0.605259	0.609797	0.008005	0.000035	-0.019205	[c,b]	0.004538
						↓ (*/2)		
4	0.605259	0.605275	0.609797	0.000035	-0.000035	-0.009602	[a,c]	0.000017
5	0.605259	0.605267	0.605275	0.000035	0.000000	-0.000035	[c,b]	0.000008

Hampiran akar x = 0.605267

Metode Terbuka

- Yang ingin dicari adalah x yang memenuhi $f(x) = 0$
- Bentuk umum persamaan lelaran metode terbuka:

  $x_{r+1} = g(x_r)$; $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

- Terkalah sebuah nilai awal x_0, lalu hitung

  $x_1, x_2, x_3, \ldots$

  yang mudah-mudahan konvergen ke akar sejati s sedemikian sehingga

  $f(s) \approx 0$ dan $s \approx f(s)$

  Kondisi berhenti lelaran dinyatakan bila

  $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

Yang termasuk ke dalam metode terbuka:

1. Metode lelaran titik-tetap (*fixed-point iteration*)
2. Metode Newton-Raphson
3. Metode *secant*

Metode Lelaran Titik-Tetap

- Metode ini kadang-kadang dinamakan juga **metode lelaran sederhana**, **metode langsung**, atau **metode sulih beruntun**.

- Susunlah persamaan $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$. Lalu, bentuklah menjadi prosedur lelaran

$$x_{r+1} = g(x_r) \qquad ; r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- Terkalah sebuah nilai awal x_0, lalu hitung x_1, x_2, x_3, ... yang mudah-mudahan konvergen ke akar sejati.
  Kondisi berhenti lelaran dinyatakan bila

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon \text{ atau } \left|\frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}}\right| < \delta$$

- **Contoh**: Carilah akar persamaan $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ dengan metode lelaran titik-tetap. Gunakan $\varepsilon = 0.000001$.

  Penyelesaian: Terdapat beberapa kemungkinan prosedur lelaran yang dapat dibentuk.

  (i) $x^2 - 2x - 3 = 0$

  $x^2 = 2x + 3$

  $x = \sqrt{(2x + 3)}$

  Dalam hal ini, $g(x) = \sqrt{(2x + 3)}$.

  Prosedur lelarannya adalah

  $x_{r+1} = \sqrt{(2x_r + 3)}$.

  Ambil terkaan awal x_0=4

  Tabel lelarannya:

r	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	4.000000	-
1	3.316625	0.683375
2	3.103748	0.212877
3	3.034385	0.069362
4	3.011440	0.022945
5	3.003811	0.007629
6	3.001270	0.002541
7	3.000423	0.000847
8	3.000141	0.000282
9	3.000047	0.000094
10	3.000016	0.000031
11	3.000005	0.000010
12	3.000002	0.000003
13	3.000001	0.000001
14	3.000000	0.000000

Hampiran akar x = 3.000000 *(konvergen monoton)*

(ii) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x(x-2) = 3$

$x = 3/(x - 2)$

Dalam hal ini, $g(x) = 3/(x - 2)$.

Prosedur lelarannya adalah

$x_{r+1} = 3/(x_r - 2)$

Ambil terkaan awal $x_0 = 4$

Tabel lelarannya:

i	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	4.000000	-
1	1.500000	2.500000
2	-6.000000	7.500000
3	-0.375000	5.625000
4	-1.263158	0.888158
5	-0.919355	0.343803
6	-1.027624	0.108269
7	-0.990876	0.036748
8	-1.003051	0.012175
9	-0.998984	0.004066
10	-1.000339	0.001355
11	-0.999887	0.000452
12	-1.000038	0.000151
13	-0.999987	0.000050
14	-1.000004	0.000017
15	-0.999999	0.000006
16	-1.000000	0.000002
17	-1.000000	0.000001

Hampiran akar x = -1.000000 *(konvergen berosilasi)*

(iii) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = (x^2 - 3)/2$

Prosedur lelarannya adalah $x_{r+1} = (x_r^2 - 3)/2$. Ambil terkaan awal x_0=4

Tabel lelarannya:

i	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	4.000000	-
1	6.500000	2.500000
2	19.625000	13.125000
3	191.070313	171.445312
4	18252.432159	18061.361847
	...	

Ternyata lelarannya divergen!

- Kadang-kadang lelaran konvergen, kadang-kadang ia divergen.

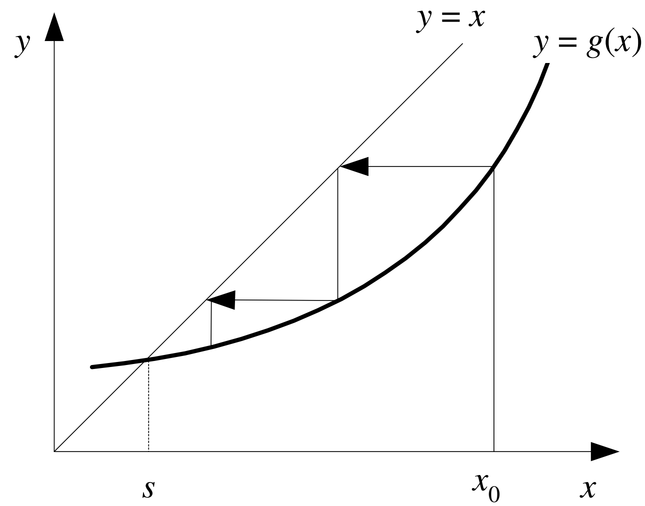
- Adakah suatu “tanda” bagi kita untuk mengetahui kapan suatu lelaran konvergen dan kapan divergen?

- **TEOREMA 3.2.** Misalkan $g(x)$ dan $g'(x)$ menerus di dalam selang $[a,b] = [s-h, s+h]$ yang mengandung titik tetap s dan nilai awal x_0 dipilih dalam selang tersebut. Jika $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in [a, b]$ maka lelaran $x_{r+1} = g(x_r)$ akan konvergen ke s. Pada kasus ini s disebut juga *titik atraktif*. Jika $|g'(x)| > 1$ untuk semua $x \in [a, b]$ maka lelaran $x_{r+1} = g(x_r)$ akan divergen dari s.

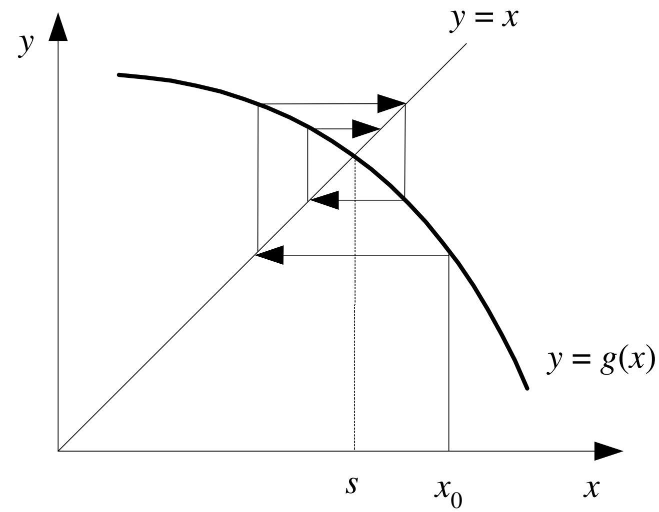
- Teorema 3.2 dapat kita sarikan sebagai berikut:

  Di dalam selang $I = [s-h, s+h]$, dengan s titik tetap,

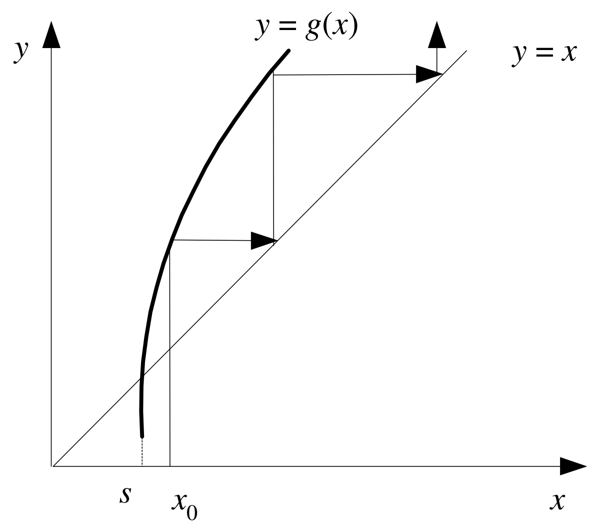
1. jika $0 < g'(x) < 1$ untuk setiap $x \in I$, maka lelaran *konvergen monoton;*
2. jika $-1 < g'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka lelaran *konvergen bersosilasi;*
3. jika $g'(x) > 1$ untuk setiap $x \in I$, maka lelaran *divergen monoton;*
4. jika $g'(x) < -1$ untuk setiap $x \in I$, maka lelaran *divergrn berosilasi*.



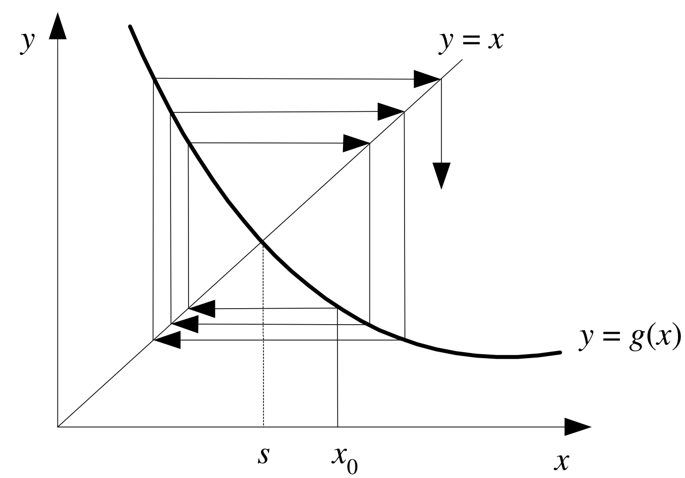
(a) Konvergen monoton: $0 < g'(x) < 1$



(b) Konvergen berosilasi: $-1 < g'(x) < 0$



(c) Divergen monoton: $g'(x) > 1$



(d) Divergen berosilasi: $g'(x) < -1$

Analisis:

1. Prosedur lelaran pertama $x_{r+1} = \sqrt{2x_r + 3}$

$$g(x) = \sqrt{(2x+3)} \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(2x+3)}}$$

Terlihat bahwa $|g'(x)| < 1$ untuk x di sekitar titik-tetap s = 3.

Karena itu, pengambilan tebakan awal x_0 = 4 akan menghasilkan lelaran yang konvergen sebab

$$|g'(4)| = \left|1/[2\sqrt{(8+3)}\right| = 0.1508 < 1$$

2. Prosedur lelaran kedua: $x_{r+1} = 3/(x_r - 2)$

$g(x) = 3/(x-2) \rightarrow g'(x) = -3/(x-2)^2$

Terlihat bahwa $|g'(x)| < 1$ untuk x di sekitar titik-tetap $s = 3$.

Karena itu, pengambilan tebakan awal $x_0 = 4$ akan menghasilkan lelaran yang konvergen sebab

$$|g'(4)| = |-3/(4-2)^2| = 0.75 < 1.$$

3. Prosedur lelaran ketiga $x_{r+1} = (x_r^2 - 3)/2$

$g(x) = (x^2 - 3)/2 \rightarrow g'(x) = x$

Terlihat bahwa $|g'(x)| > 1$ untuk x di sekitar titik-tetap $s = 3$.

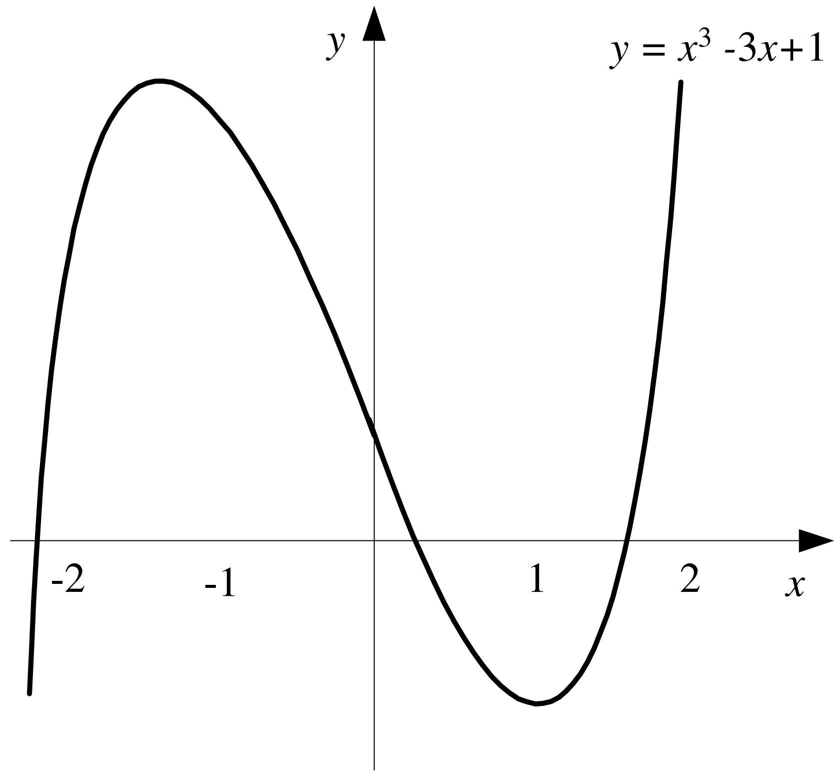
Karena itu, pengambilan tebakan awal $x_0 = 4$ akan menghasilkan lelaran yang divergen sebab

$$|g'(4)| = |4| = 4 > 1.$$

- Kesimpulan: ada dua hal yang mempengaruhi kekonvergenan prosedur lelaran:

  1. Bentuk formula $x_{r+1} = g(x_r)$
  2. Pemilihan tebakan awal x

- **Contoh**: Gunakan metode lelaran titik-tetap untuk mencari akar persamaan x^3 - 3x + 1 di dalam selang [1, 2]



- **Penyelesaian:**

(i) $x_{r+1} = (x_r^3 + 1)/3$
Tetapi, karena $|g'(x)| = |x^2| > 1$ di dalam selang [1, 2], maka prosedur lelaran ini tidak digunakan.

(ii) $x_{r+1} = -1/(x_r^2 - 3)$
Tetapi, karena $|g'(x)| = |2x/(x^2 - 3)^3| > 1$ di dalam selang [1, 2], maka prosedur lelaran ini tidak digunakan.

(iii) $x_{r+1} = 3/x_r - 1/x_r^2$
Ternyata $|g'(x)| = |(-3x + 2)/x^3| \leq 1$ di dalam selang [1, 2], yaitu, $g'(x)$ naik dari $g'(1) = -1$ ke $g'(2)=-1/2$. Jadi, $|g'(x)|$ lebih kecil dari 1 di dalam selang [1, 2].

Dengan mengambil $x = 1.5$, prosedur lelarannya konvergen ke akar $x = 1.5320889$ seperti pada tabel berikut ini.

r	x
0	1.5
1	1.5555556
2	1.5153061
…	…
43	1.5320888
44	1.5320889
45	1.5320889

4. Prosedur lelaran keempat: $x_{r+1} = (-x_r^{\,3} + 3)/6$

$g(x) = (-x^3 + 3)/6 \rightarrow g'(x) = -x^2/2$

Terlihat bahwa $|g'(x)| < 1$ untuk x di sekitar titik-tetap $s = 0.48$.

Pemilihan $x_0 = 0.5$ akan menjamin lelaran konvergen sebab $|g'(x_0)| < 1$.

Untuk $x_0 = 1.5$ dan $x_0 = 2.2$ memang nilai $|g'(x_0)| > 1$ tetapi lelarannya masih tetap konvergen, namun $x_0 = 2.7$ terlalu jauh dari titik-tetap sehingga lelarannya divergen.

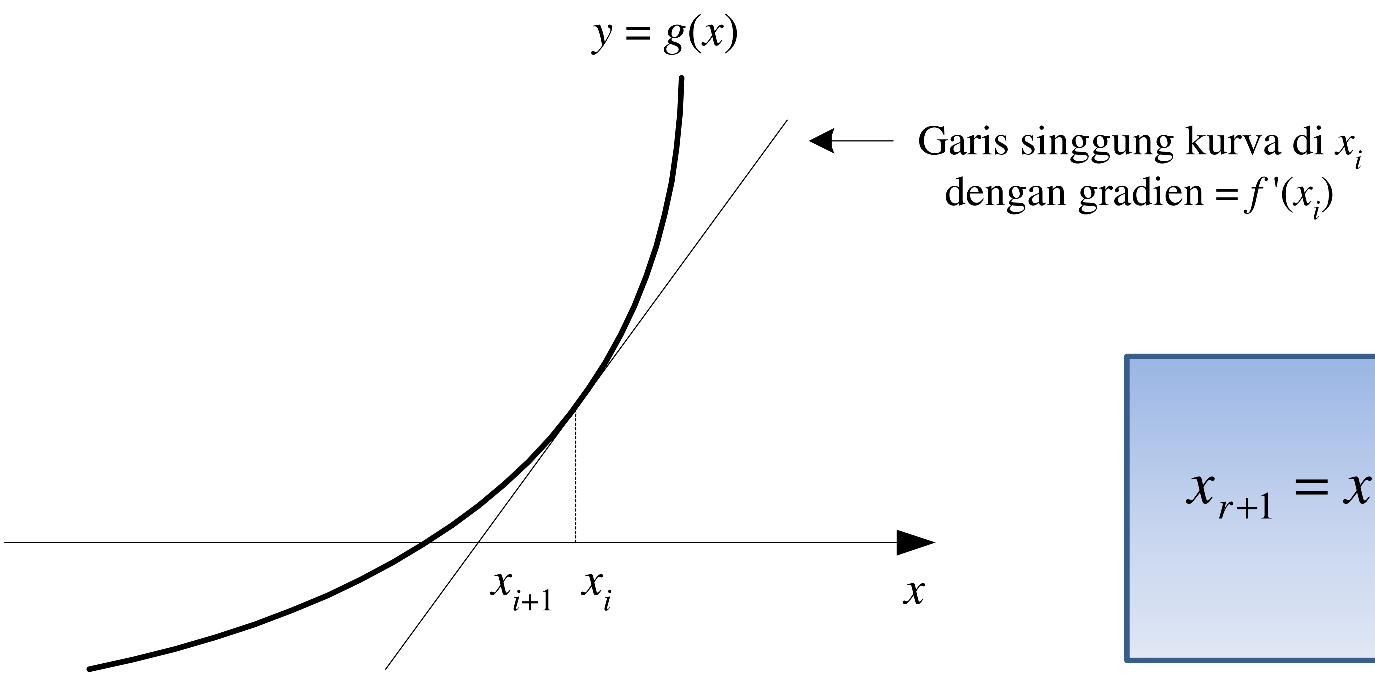
Metode Newton-Raphson

- Metode Newton-Raphsonlah yang paling terkenal dan paling banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa.
- Metode ini paling disukai karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya.
- Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson, yaitu:

  (i) penurunan rumus Newton-Raphson secara geometri,

  (ii) penurunan rumus Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor.

(a) Penurunan rumus Newton-Raphson secara geometri



$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Gradien garis singgung di x_r adalah

$$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}} \longrightarrow f'(x_r) = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}} \longrightarrow x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$, f'(x_r) \neq 0$

(b) Penurunan rumus Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor

- Uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2} f''(t), \quad x_r < t < x_{r+1}$$

- yang bila dipotong sampai suku orde-2 saja menjadi

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r)$$

- dan karena persoalan mencari akar, maka $f(x_{r+1}) = 0$, sehingga

$$0 = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r)$$

atau

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \qquad , f'(x_r) \neq 0$$

- Kondisi berhenti lelaran Newton-Raphson adalah bila

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$$

atau bila menggunakan galat relatif hampiran

$$\left|\frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}}\right| < \delta$$

dengan ε dan δ adalah toleransi galat yang diinginkan.

```
procedure Newton_Raphson(x:real);
{ Mencari akar persamaan f(x) = 0 dengan metode Newton-Raphson
  K.Awal : x adalah tebakan awal akar, nilainya sudah terdefinisi
  K.Akhir: akar persamaan tercetak di layar }
const
  epsilon = 0.000001;
var
    x_sebelumnya: real;

    function f(x:real):real;
    { mengembalikan nilai f(x). Definisi f(x) bergantung pada persoalan }

    function f_aksen(x:real):real;
    { mengembalikan nilai f'(x). Definisi f'(x) bergantung pada persoalan }
begin
  repeat
     x_sebelumnya:=x;
     x:=x - f(x)/f_aksen(x);
  until (ABS(x-x_sebelumnya) < epsilon)
   { x adalah hampiran akar persamaan }
  write('Hampiran akar x = ', x:10:6);
end;
```

- **Contoh**: Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Newton-Raphson. Gunakan $\varepsilon = 0.00001$. Tebakan awal akar $x_0 = 1$.

Penyelesaian:

$f(x) = e^x - 5x^2$

$f'(x) = e^x - 10x$

Prosedur lelaran Newton-Raphson:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}$$

Tebakan awal $x_0 = 1$

Tabel lelarannya:

i	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	0.500000	-
1	0.618976	0.118976
2	0.605444	0.013532
3	0.605267	0.000177
4	0.605267	0.000000

Hampiran akar x = 0.605267